

حل الإختبار

السؤال الأول : [8 درجات]

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3 + \sin(x-1) & , x < 1 \\ a\sqrt{x} + b & , x \geq 1 \end{cases}$ فأوجد قيمة الثابتين a, b لكي تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = 1$.

الحل: لكي تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = 1$ فمن الضروري أن تكون متصلة عند هذه النقطة ، أي أن

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

الآن

(درجة)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 + \sin(x-1) = 3 + \sin 0 = 3$$

(درجة)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a\sqrt{x} + b = a + b$$

أيضاً

وواضح من تعريف الدالة أن $f(1) = a + b$

وبالتالي يجب أن يكون

(درجة)

$$a + b = 3 \quad \dots \quad (1)$$

ولكي تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = 1$ يجب أن يكون $f'_+(1) = f'_-(1)$

الآن ومن المعادلة (١) نجد أن

(درجتان)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(3 + \sin(x-1)) - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x - 1} = 1$$

أي أن $f'_+(1) = 1$

ونحسب أيضاً

(درجتان)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(a\sqrt{x} + b) - (a + b)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a\sqrt{x} - a}{x - 1} = a \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\ &= a \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = a \times \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

أي أن $f'_-(1) = \frac{a}{2}$

(درجة)

إذن لابد وأن يتحقق أن $\frac{a}{2} = 1$ ، أي أن $a = 2$ ومن المعادلة (١) ينتج أن $b = 1$.

السؤال الثاني : [٩ درجات]

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \sin\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{2}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

درجة

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{2}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

وحيث أن $x \rightarrow \infty$ تكافئ أن $\frac{1}{x} \rightarrow 0+$ ، إذن $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)} = 2$ ، أما بالنسبة للنهاية الثانية في

الطرف الأيمن نلاحظ أن $|\sin\left(\frac{2}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$ ، إذن دالة محدودة وينتج أن الدالة $\frac{1}{x} \sin\left(\frac{2}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

عبارة عن حاصل ضرب دالة محدودة في دالة تؤول للصفر ، وبالتالي $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{2}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. درجة

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \sin\left(\frac{2}{x}\right) = 2 + 0 = 2 \quad \text{إذن}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - \tan 3x}{\sin 3x - 3 \sin x}$$

واضح أن نهاية دالة البسط ونهاية دالة المقام كلاهما صفرًا

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3 \tan x - \tan 3x) = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x - 3 \sin x) = 0$$

وبالتالي نجد أن النهاية تأخذ الصورة الغير معينة $\frac{0}{0}$ درجة ويمكن بسهولة التحقق من أن شروط قاعدة لوبيتال متحققة

مثلاً علي الفترة $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$ وبالتالي يكون

درجة

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - \tan 3x}{\sin 3x - 3 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sec^2 x - 3 \sec^2 3x}{3 \cos 3x - 3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 3x - \cos^2 x}{(\cos 3x - \cos x) \cos^2 3x \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x + \cos x}{\cos^2 3x \cos^2 x} = 2 \end{aligned}$$

درجة

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

حيث أن دالة $\sin x$ موجبة في الفترة $]0, \frac{\pi}{2}[$ ، أي علي يمين الصفر مباشرة فنجد أن

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

درجة

وحيث أن دالة $\sin x$ سالبة في الفترة $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ، أي علي يسار الصفر مباشرة فنجد أن

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1$$

درجة

وينتج أن النهاية غير موجودة .

السؤال الثالث : [٧ درجات]

إذا كانت $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = |x|$ ، فحدد نطاق الاتصال ونطاق الاشتقاق للدالة $g \circ f$ ، ثم احسب $(g \circ f)'(x)$ ، $(g \circ g)'(x)$.

الحل: الدالة $f(x) = |x|$ نطاقها $\mathbb{R}$ ومتصلة علي $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق علي $\mathbb{R}^*$ ومداها $[0, \infty[$ والدالة $g(x) = \sqrt{x}$ نطاقها $[0, \infty[$ ومتصلة علي $[0, \infty[$ وقابلة للاشتقاق علي $[0, \infty[$. درجة وبالتالي الدالة

درجة $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = \sqrt{|x|}$

تكون متصلة علي نطاقها $\mathbb{R}$ ولكنها قابلة للاشتقاق فقط علي $\mathbb{R}^*$ درجة وتكون مشتقتها هي :

درجتان $(g \circ f)'(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & , x > 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x}} & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{|x|}} & , x > 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{|x|}} & , x < 0 \end{cases}$

أيضاً يكون

درجة $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$

وبالتالي

درجة $(g \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} x^{1/4} = \frac{1}{4} x^{-3/4}$

السؤال الرابع : [٨ درجات]

إذا كانت $y = (\cos^{-1}(3x))^2$ ، فبرهن أن $(1-9x^2)y'' - 9xy' - 18 = 0$ ، ثم احسب $y'(0)$ ، $y''(0)$.

الحل:

حيث أن $y = (\cos^{-1}(3x))^2$ ، إذن

درجتان

$$y' = 2(\cos^{-1}(3x)) \times \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}} = -6(\cos^{-1}(3x)) \times \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$$

بضرب الطرفين في $\sqrt{1-9x^2}$ فيكون :

$$\sqrt{1-9x^2} y' = -6(\cos^{-1}(3x)) \quad \dots \dots (1)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة لـ x :

٣ درجات

$$\sqrt{1-9x^2} y'' - \frac{9x}{\sqrt{1-9x^2}} y' = -6 \times \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

ومنها بضرب الطرفين في $\sqrt{1-9x^2}$ فيكون :

درجة

$$(1-9x^2)y'' - 9xy' = 18 \quad \dots \dots (2)$$

وهو المطلوب أولاً.

بوضع $x = 0$ في (١) ثم في (٢) ينتج أن

درجة

$$y'(0) = -6 \cos^{-1} 0 = -6 \times \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = \mp 3\pi$$

درجة

$$y''(0) = 18$$

السؤال الخامس : [٩ درجات]

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية علي نطاق اشتقاقها:

(i) $y = \tan^{-1}(\cot x) + x \cos x \sin^3(x^2)$

(ii) $x^2y - y^3 = 1 + \tan(xy)$

(iii) $x = \sec(5/t)$, $y = \sec^{-1}(t^2 + 1)$.

الحل:

(i) $y = \tan^{-1}(\cot x) + x \cos x \sin^3(x^2)$

3 درجات

$$y' = \frac{1}{1 + \cot^2 x} \times -\csc^2 x + \cos x \sin^3(x^2) - x \sin x \sin^3(x^2) + x \cos x \times 3 \sin^2(x^2) \cos(x^2) \times 2x$$

$$= -1 + \cos x \sin^3(x^2) - x \sin x \sin^3(x^2) + 6x^2 \cos x \sin^2(x^2) \cos(x^2)$$

(ii) $x^2y - y^3 = 1 + \tan(xy)$

واضح أن الدالة في الصورة الضمنية ، فبتفاضل الطرفين بالنسبة لـ x

درجتان

$$x^2y' + 2xy - 3y^2y' = \sec^2(xy) \times (xy' + y)$$

$$(x^2 - 3y^2 - x \sec^2(xy))y' = y \sec^2(xy) - 2xy$$

درجة

وينتج أن

$$y' = \frac{y \sec^2(xy) - 2xy}{(x^2 - 3y^2 - x \sec^2(xy))}$$

(iii) $x = \sec(5/t)$, $y = \sec^{-1}(t^2 + 1)$.

واضح أن الدالة في الصورة البارامترية ويكون

3 درجات

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2t}{t^2 + 1} \sqrt{(t^2 + 1)^2 - 1}}{\frac{-5}{t^2} \sec(5/t) \tan(5/t)} = \frac{-2t^3}{5(t^2 + 1) \sqrt{(t^2 + 1)^2 - 1} \sec(5/t) \tan(5/t)}$$

السؤال السادس: [٩ درجات]

استنتج المشتقة النونية للدالة $f(x) = \sin(ax + b)$ ، حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ، ثم استخدم قاعدة ليبنتز لإيجاد المشتقة النونية للدالة $h(x) = (1+x)^2 \sin(4x)$ ومن ذلك استنتج $h^{(3)}(0)$ وضعها في أبسط صورة.

الحل:

معلوم أن $\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ وبالتالي يمكن استنتاج أن :

$$f(x) = \sin(ax + b)$$

$$f'(x) = a \cos(ax + b) = a \sin(ax + b + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = a^2 \cos(ax + b + \frac{\pi}{2}) = a^2 \sin(ax + b + 2\frac{\pi}{2})$$

$$f^{(3)}(x) = a^3 \cos(ax + b + 2\frac{\pi}{2}) = a^3 \sin(ax + b + 3\frac{\pi}{2})$$

... ..

ومما سبق يمكن استنتاج أن

$$f^{(n)}(x) = a^n \sin(ax + b + n\frac{\pi}{2})$$

الدالة $h(x) = (1+x)^2 \sin(4x)$ عبارة عن حاصل ضرب دالتين $u(x) = (1+x)^2$ ، $v(x) = \sin(4x)$ ويمكن استخدام قاعدة ليبنتز لإيجاد المشتقة النونية لها

$$\begin{aligned} h^{(n)} &= v^{(n)}u + \binom{n}{1}v^{(n-1)}u^{(1)} + \binom{n}{2}v^{(n-2)}u^{(2)} + \dots + \binom{n}{r}v^{(n-r)}u^{(r)} + \dots + vu^{(n)} \\ &= v^{(n)}u + nv^{(n-1)}u^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2}v^{(n-2)}u^{(2)} + \dots + vu^{(n)} \end{aligned}$$

وحيث أن

$$u(x) = (1+x)^2, u^{(1)}(x) = 2(1+x), u^{(2)}(x) = 2, u^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 3$$

وأن $v^{(n)}(x) = 4^n \sin(4x + n\frac{\pi}{2})$ ، فينتج أن :

$$\begin{aligned} h^{(n)} &= (1+x)^2 \times 4^n \sin(4x + n\frac{\pi}{2}) + 2n(1+x) \times 4^{n-1} \sin(4x + (n-1)\frac{\pi}{2}) \\ &\quad + n(n-1) \times 4^{n-2} \sin(4x + (n-2)\frac{\pi}{2}). \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

وعندما $n = 3$ نجد أن

$$\begin{aligned} h^{(3)}(0) &= (1+0)^2 \times 4^3 \sin(0 + 3\frac{\pi}{2}) + 2 \times 3(1+0) \times 4^2 \sin(0 + 2\frac{\pi}{2}) \\ &\quad + 3(2) \times 4 \sin(0 + \frac{\pi}{2}). = 64(-1) + 0 + 24 = -40 \end{aligned}$$

السؤال السابع : [١١ درجة]

ابحث أطراف الدالة $f(x) = x + \frac{9}{x}$ موضعاً فترات التزايد وفترات التناقص والقيم العظمى

والصغرى المحلية وفترات التفرع ونقط الانقلاب وخطوط التقارب ، ثم ارسم منحناها.

الحل: من الواضح أن هذه الدالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ ، والدالة فردية . كما يمكن ملاحظة أن الدالة لا تقطع محوري

الإحداثيات لأن الدالة يمكن وضعها على الصورة $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$ والبسط لا ينعدم. درجة

ولدراسة الاطراف نحسب المشتقة الأولى للدالة فيكون $y' = f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$ درجة ، ولإيجاد النقاط الحرجة للدالة

نضع $y' = 0$ وينتج من ذلك أن $1 - \frac{9}{x^2} = 0$ ، ومنها $x^2 - 9 = 0$ ، أي أن $x^2 = 9$ وينتج أن $x = \pm 3$

هي النقاط الحرجة للدالة درجة . ويمكن عمل الجدول التالي :

x	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
y'	+ve	0	-ve	غير موجودة	-ve	0	+ve
y	تزايدية فعلاً	-6	تناقصية فعلاً	غير معرفة	تناقصية فعلاً	6	تزايدية فعلاً
		قيمة عظمى محلية				قيمة صغرى محلية	

ولدراسة التفرع نحسب المشتقة الثانية : $y'' = f''(x) = \frac{18}{x^3}$ درجة

ويتضح من ذلك أن الدالة ليس لها نقط انقلاب لأن $f''(x) \neq 0$ ويلاحظ أنه إذا كانت $x < 0$ فتكون

$f''(x) < 0$ ويكون تقعر المنحني لأسفل بينما إذا كانت $x > 0$ فتكون $f''(x) > 0$ ويكون تقعر المنحني

لأعلى درجة.

ولحساب الخطوط التقاربية الرأسية والأفقية :

بالنسبة للأفقية : نحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ فنجد أن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \frac{9}{x} = \pm\infty$ ومن ثم فإنه لا يوجد

للدالة خطوط تقاربية أفقية.

وبالنسبة للرأسية: نبحث نهاية الدالة حول النقاط التي تكون الدالة غير معرفة عندها. واضح أن الدالة غير معرفة عند

النقطة $x = 0$ ، وعند هذه النقطة يكون :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{9}{x} = +\infty , \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \frac{9}{x} = -\infty$$

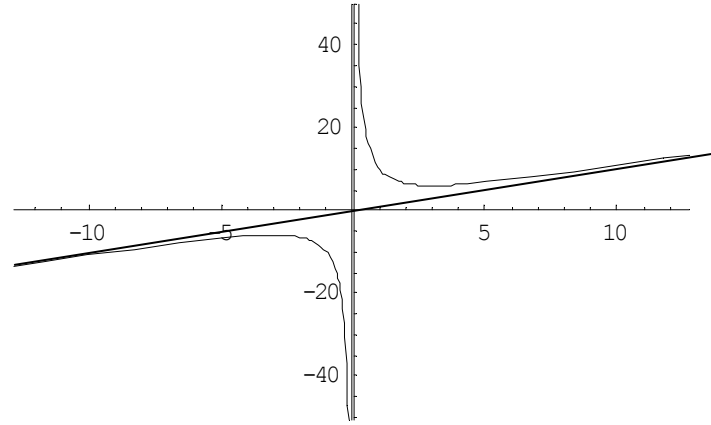
إذن الخط $x = 0$ خطاً تقاربياً رأسياً للدالة . درجة

بالنسبة للخطوط التقاربية المائلة : واضح من تعريف الدالة أن الخط $y = x$ خط تقاربي مائل لمنحني الدالة لأن

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9}{x} = 0$$

ويكون لمنحني الدالة خط تقاربي مائل وهو $y = x$. درجة

ومما سبق يمكن استنتاج أن رسم الدالة يكون علي الصورة التالية:



درجة